



ANALISIS KESTABILAN TITIK TETAP PADA MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN HIV/AIDS

Moch. Fahmi Lamusu¹, Dewinta Mamula^{2*}, Fitriyani Muhsana³

^{1,2,3}Jurusan Matematika, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango 96119, Indonesia

**Penulis Korespondensi. Email: dewintamamula@gmail.com*

Abstrak

Artikel ini membahas tentang virus yang merusak sistem kekebalan tubuh, dengan menginfeksi dan menghancurkan sel CD4, yaitu virus HIV (human immunodeficiency virus). Infeksi HIV yang tidak segera ditangani akan berkembang menjadi kondisi yang serius yang disebut AIDS (Acquired Immune Deficiency Syndrome). Tujuan penulisan artikel ini adalah Mengetahui model epidemik SIA pada penularan penyakit HIV/AIDS, Mengetahui titik kesetimbangan dan melakukan analisis kestabilan dan Mengetahui penularan dan pencegahan penyakit HIV/AIDS. Hasil pembahasan menunjukkan jika kedua kota dalam kondisi endemik HIV/AIDS dibuktikan dengan nilai $R_0 > 1$. Jika $R_0 < 1$ maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil. $R_0 > 1$ maka terdapat dua titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil, dan titik kesetimbangan endemi yang stabil.

Kata Kunci: HIV/AIDS; Model Matematika; Titik Tetap; Analisis Kestabilan

1. Pendahuluan

HIV (human immunodeficiency virus) adalah virus yang merusak sistem kekebalan tubuh, dengan menginfeksi dan menghancurkan sel CD4. Semakin banyak sel CD4 yang dihancurkan, kekebalan tubuh akan semakin lemah, sehingga rentan diserang berbagai penyakit. Infeksi HIV yang tidak segera ditangani akan berkembang menjadi kondisi yang serius yang disebut AIDS (Acquired Immune Deficiency Syndrome). AIDS adalah stadium akhir dari infeksi virus HIV. Pada tahap ini, kemampuan tubuh untuk melawan infeksi sudah hilang sepenuhnya. Sampai saat ini belum ada obat untuk menangani HIV dan AIDS. Akan tetapi, ada obat untuk memperlambat perkembangan penyakit tersebut dan dapat meningkatkan harapan hidup penderita.

Model matematika seringkali digunakan untuk menjelaskan fenomena dalam bidang biologi, seperti penyebaran penyakit menular. Fenomena tersebut dimodelkan oleh persamaan diferensial dengan representasi proses waktu kontinu. [1] melakukan penelitian analisa kestabilan penyebaran HIV/AIDS dengan edukasi kesehatan melalui perluasan model SI (Susceptible-Infected), dampak edukasi kesehatan pada penyebaran penyakit HIV/AIDS dikaji dengan analisis sensitivitas angka reproduksi efektif terhadap semua parameter yang mendorong dinamika penyakit. [2] membahas tentang model SIA transmisi HIV di Ghana. Berdasarkan referensi dari penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, dalam penelitian ini dikaji model matematika dinamika transmisi atau penularan HIV/AIDS.

Model matematika epidemic yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah model epidemic penularan HIV/AIDS yang dimodelkan dalam bentuk SIA. Model epidemic pada penularan HIV/AIDS ini, populasi manusia pada waktu t tetap terbagi dalam 3 populasi yaitu S, I, dan A. individu-individu yang termasuk dalam kelompok Susceptible (S), menyatakan kelompok awal populasi yang rentan terkena penyakit. Infective (I), menyatakan kelompok populasi yang terinfeksi penyakit. AIDS (A) yaitu kelompok populasi yang sudah terkena penyakit.

Tujuan penelitian ini yaitu untuk mengetahui titik kesetimbangan, melakukan analisis kestabilannya, menentukan bilangan reproduksi dasar, Mengetahui model epidemic SIA pada penularan penyakit HIV/AIDS, dan Mengetahui penularan dan pencegahan penyakit HIV/AIDS.

2. Metode Penelitian

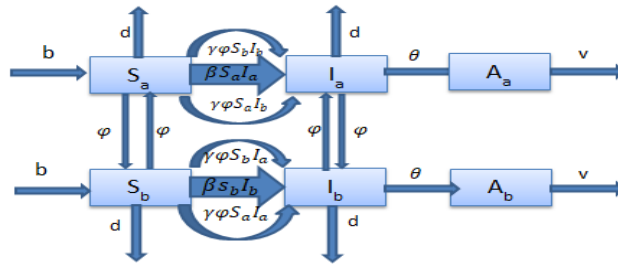
Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka dengan tahap-tahap: (1) penentuan masalah, (2) perumusan masalah, (3) studi pustaka, (4) analisis dan pemecahan masalah, (5) penarikan

kesimpulan. Pemilihan dan perumusan masalah diperlukan untuk membatasi permasalahan sehingga diperoleh bahan kajian yang jelas. Sehingga akan lebih mudah untuk menentukan langkah dalam memecahkan masalah tersebut.

Tahap studi pustaka dilakukan dengan mengkaji sumber-sumber pustaka sehingga diperoleh gambaran umum dan populasinya, model matematika, model epidemic SIA, sistem persamaan diferensial, nilai eigen dan faktor eigen, simulasi model dengan software mathematica. Dalam pembahasan ini dilakukan beberapa langkah pokok yaitu. (1) Membangun model matematika pada penyebaran penyakit HIV/AIDS, (2) mencari titik kesetimbangan dari model matematika, (3) menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0), (4) menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, (5) menginterpretasikan solusi model matematika.

3. Pembahasan

Model epidemic pada penularan HIV/AIDS ini, populasi manusia pada waktu t tetap terbagi dalam 3 populasi yaitu S, I, dan A. individu-individu yang termasuk dalam kelompok Susceptible (S), menyatakan kelompok awal populasi yang rentan terkena penyakit. Infective (I), menyatakan kelompok populasi yang terinfeksi penyakit. AIDS (A) yaitu kelompok populasi yang sudah terkena penyakit. Secara skematis diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema penularan penyakit HIV/AIDS

Berdasarkan skema pada Gambar 1, diperoleh model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{ds_a}{dt} = b + \varphi s_b - \varphi s_a - ds_a - \beta s_a I_a - \gamma \varphi s_b I_b - \gamma \varphi s_a I_b$$

$$\frac{dI_a}{dt} = \beta s_a I_a + \varphi I_b - \varphi I_a + \gamma \varphi s_b I_b + \gamma \varphi s_a I_b - dI_a - \theta I_a$$

$$\frac{dA_a}{dt} = \theta I_a - v A_a$$

$$\frac{ds_b}{dt} = b - ds_b + \varphi s_a - \varphi s_b - \beta s_b I_b - \gamma \varphi s_a I_a - \gamma \varphi s_b I_a$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \beta s_b I_b + \varphi I_a - \varphi I_b + \gamma \varphi s_a I_a + \gamma \varphi s_b I_a - dI_b - \theta I_b$$

$$\frac{dA_b}{dt} = \theta I_b - v A_b$$

dengan S_i, I_i, A_i mewakili banyaknya populasi Susceptible, Infective, dan AIDS. Kedua kota diasumsikan identic, sehingga parameter yang digunakan kedua kota sama. Parameter-parameter yang digunakan yaitu:

b = laju kelahiran

d = Rata rata kematian alami

β = Rata rata penularan

φ = rata rata perpindahan penduduk

γ = rata rata penularan antar wilayah

θ = rata rata perubahan dari HIV menjadi AIDS

v = rata rata kematian akibat HIV/AIDS

S_a = populasi dari individu-individu rentan di KOTA A

I_a = populasi dari individu-individu terinfeksi HIV di KOTA A

A_a = populasi individu yang telah mencapai fase AIDS di KOTA A

S_b = populasi dari individu-individu rentan di KOTA B

I_b = populasi dari individu-individu terinfeksi HIV di KOTA B

A_b = populasi individu yang telah mencapai fase AIDS di KOTA B

3.1. Titik Tetap Tanpa Penyakit

Dengan membuat : $\frac{dS_a}{dt} = \frac{dI_a}{dt} = \frac{dA_a}{dt} = \frac{dS_b}{dt} = \frac{dI_b}{dt} = \frac{dA_b}{dt} = 0$, maka:

$$\frac{dS_a}{dt} = b + \varphi S_b - \varphi S_a - dS_a - \beta S_a I_a - \gamma \varphi S_b I_b - \gamma \varphi S_a I_b = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\Rightarrow b + \varphi S_b - \varphi S_a - dS_a = 0$$

$$\Rightarrow b + \varphi S_b - (\varphi + d)S_a = 0$$

$$\Rightarrow S_a = \frac{b + \varphi S_b}{\varphi + d}$$

$$\frac{dS_b}{dt} = b - dS_b + \varphi S_a - \varphi S_b - \beta S_b I_b - \gamma \varphi S_a I_a - \gamma \varphi S_b I_b = 0$$

$$\Rightarrow b - dS_b + \varphi S_a - \varphi S_b = 0$$

$$\Rightarrow b - (d + \varphi)S_a - \varphi S_b = 0$$

$$\Rightarrow b - dS_b + \varphi S_a - \varphi \left(\frac{b + \varphi S_b}{\varphi + d} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\varphi + d)b - (\varphi + d)^2 S_b + \varphi(b + \varphi S_b) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi b + db - (\varphi + d)^2 S_b + \varphi b + \varphi^2 S_b = 0$$

$$\Rightarrow \varphi b + db + \varphi b + [\varphi^2 - (\varphi + d)^2] S_b = 0$$

$$\Rightarrow 2\varphi b + db + [\varphi^2 - \varphi^2 - 2\varphi d - d^2] S_b = 0$$

$$\Rightarrow (2\varphi d + d^2) S_b = 2\varphi b + db$$

$$\Rightarrow S_b = \frac{2\varphi b + db}{2\varphi d + d^2}$$

$$\Rightarrow S_b = \frac{b(2\varphi + d)}{d(2\varphi + d^2)}$$

$$\Rightarrow S_b = \frac{b}{d}$$

Dari persamaan (1), yaitu :

$$S_a = \frac{b + \varphi S_b}{\varphi + d} \quad \text{Substitusi nilai } S_b = \frac{b}{d}$$

$$S_a = \frac{b + \varphi \frac{b}{d}}{\varphi + d}$$

$$S_a = \frac{\frac{bd + \varphi b}{d}}{\varphi + d}$$

$$S_a = \frac{bd + \varphi b}{d(\varphi + d)}$$

$$S_a = \frac{b(\varphi + d)}{d(\varphi + d)}$$

$$S_a = \frac{b}{d}$$

Didapat titik tetap tanpa penyakit

$$P_0 = (S_a, I_a, A_a, S_b, I_b, A_b) = \left(\frac{b}{d}, 0, 0, \frac{b}{d}, 0, 0 \right)$$

3.2. Mencari Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Dengan mengambil sistem persamaan yang memuat populasi teinfeksi (I) dan populasi AIDS (A) pada kedua kota

$$\frac{dI_a}{dt} = \beta S_a I_a + \gamma \varphi S_b I_b + \gamma \varphi S_a I_b + \varphi I_b - \varphi I_a - dI_a - \theta I_a$$

$$\frac{dA_a}{dt} = \theta I_a - \nu A_a$$

$$\frac{dI_b}{dt} = \beta S_b I_b + \gamma \varphi S_a I_a + \gamma \varphi S_b I_a + \varphi I_a - \varphi I_b - dI_b - \theta I_b$$

$$\frac{dA_b}{dt} = \theta I_b - \nu A_b$$

Jumlahkan persamaan (1) dan (3), (2) dan (4):

$$\frac{dI_a}{dt} + \frac{dI_b}{dt} = \beta S_a I_a + \beta S_b I_b + \gamma \varphi S_b I_b + \gamma \varphi S_a I_a + \gamma \varphi S_a I_b + \gamma \varphi S_b I_a - dI_a - dI_b - \theta I_a - \theta I_b$$

$$\frac{dA_a}{dt} + \frac{dA_b}{dt} = \theta I_a + \theta I_b - \nu A_a - \nu A_b$$

Maka berdasarkan persamaan diatas diperoleh matriks F dan V, sebagai berikut :

$$F = \begin{bmatrix} \beta S_a I_a + \beta S_b I_b + \gamma \varphi S_b I_b + \gamma \varphi S_a I_a + \gamma \varphi S_a I_b + \gamma \varphi S_b I_a \\ \theta I_a + \theta I_b \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} (d + \theta) I_a + (d + \theta) I_b \\ \nu A_a + \nu A_b \end{bmatrix}$$

Matriks jacobian dari matriks diatas adalah sebagai berikut :

$$F = j(F) = \begin{bmatrix} \beta S_a + \gamma \varphi S_a + \gamma \varphi S_b & 0 \\ \theta & 0 \end{bmatrix}, \quad V = j(V) = \begin{bmatrix} d + \theta & 0 \\ 0 & \nu \end{bmatrix}$$

Substitusi titik tetap tanpa penyakit kepersamaan diatas :

$$F = \begin{bmatrix} \beta \frac{b}{d} + \gamma \varphi \frac{b}{d} + \gamma \varphi \frac{b}{d} & 0 \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta b + 2\gamma\phi b}{d} & 0 \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} d + \theta & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$$

Menentukan matriks next generation (K), dimana $K = F \cdot V^{-1}$ karena,

$$V = \begin{bmatrix} d + \theta & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d + \theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{bmatrix}$$

Maka didapat K :

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta b + 2\gamma\phi b}{d} & 0 \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{d + \theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\beta b + 2\gamma\phi b}{d(d + \theta)} & 0 \\ \frac{\theta}{d + \theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan R0 dengan mencari nilai eigen positif terbesar dari matriks K

$$|K - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \frac{\beta b + 2\gamma\phi b}{d(d + \theta)} - \lambda & 0 \\ \frac{\theta}{d + \theta} & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left(\frac{\beta b + 2\gamma\phi b}{d(d + \theta)} - \lambda \right) (-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\beta b + 2\gamma\phi b}{d(d + \theta)}$$

Dapat ditentukan R0 adalah nilai eigen positif terbesar :

$$R_0 = \frac{\beta b + 2\gamma\phi b}{d(d + \theta)}$$

Menentukan matriks jacobian untuk titik tetap tanpa penyakit

$$J = \begin{bmatrix} A & B & 0 & C & D & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & G & H & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & A & B & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H \end{bmatrix}, \text{dimana}$$

$$A = -\phi - d$$

$$B = -\frac{b\beta}{d}$$

$$C = \phi$$

$$D = \frac{2\gamma\phi b}{d}$$

$$E = \frac{b\beta - \varphi d - d^2 - \theta d}{d}$$

$$F = \frac{2\gamma\varphi b + d\varphi}{d}$$

$$G = \theta$$

$$H = -\nu$$

3.3. Mencari Nilai Eigen Matriks Jacobian untuk Titik Tetap Tanpa Penyakit

Menentukan determinan matriks J

$$|J| = \begin{bmatrix} A & B & 0 & C & D & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & G & H & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & A & B & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow -\frac{D}{E}b_5 + b_1 \\ \longrightarrow -\frac{F}{E}b_5 + b_2 \end{array}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} A & \frac{BE-DF}{E} & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E^2-F^2}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & H & 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 & A & B & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H \end{bmatrix} \longrightarrow -\frac{B}{E}b_5 + b_4$$

$$[J] = \begin{bmatrix} A & \frac{BE-DF}{E} & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E^2-F^2}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & H & 0 & 0 & 0 \\ C & \frac{DE-BF}{E} & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H \end{bmatrix} \longrightarrow c \frac{DF-BE}{E^2-F^2} b_2 + b_1$$

$$[J] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E^2-F^2}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & H & 0 & 0 & 0 \\ C & \frac{DE-BF}{E} & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{BF-DE}{E^2+F^2} b_2 + b_4$$

$$-\frac{C}{A}b_4 + b_1$$

$$[J] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E^2 - F^2}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & H & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{A^2 - C^2}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E^2 - F^2}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G & H & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & H \end{bmatrix}$$

Didapat [J] adalah perkalian elemen diagonal matriks diatas :

$$[J] = \left(\frac{A^2 - C^2}{A} \right) \cdot \left(\frac{E^2 - F^2}{E} \right) \cdot H \cdot A \cdot E \cdot H$$

$$[J] = (A^2 - C^2)(E^2 - F^2), H^2$$

Untuk mencari $|J - \lambda I|$, kita hanya perlu mengganti $\{J_{ij} | i = j\}$ pada matriks awal J, dengan $\{J_{ij} | i = j\}$. Perlu diingat bahwa J_{ij} untuk $i = j$ adalah elemen diagonal matriks J. Yaitu : A, E, H, A, E, H

Maka didapat :

$$|J - \lambda I| = [(A - \lambda)^2 - C^2][(E - \lambda)^2 - F^2][(H - \lambda)^2] = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda)^2 - C^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2A\lambda + A^2 - C^2 = 0$$

$$[\lambda - (A + C)][\lambda - (A - C)] = 0$$

$$\lambda_1 = A + C$$

$$\lambda_2 = A - C$$

$$\Rightarrow (E - \lambda)^2 - F^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2E\lambda + E^2 - F^2 = 0$$

$$[\lambda - (E + F)][\lambda - (E - F)] = 0$$

$$\lambda_3 = E + F$$

$$\lambda_4 = E - F$$

$$\Rightarrow (H - \lambda)^2 = 0$$

$$(H - \lambda) \cdot (H - \lambda) = 0$$

$$\lambda_5 = H$$

$$\lambda_6 = H$$

3.4. Analisis kestabilan

$$\lambda_1 = A + C$$

$$= (-\varphi - d) + \varphi$$

$$= -d$$

$$\lambda_2 = A - C$$

$$= (-\varphi - d) - (\varphi)$$

$$= -2\varphi - d$$

$$\lambda_3 = E + F$$

$$= \frac{b\beta - \varphi d - d^2 - \theta d}{d} + \frac{2\gamma\varphi b + d\varphi}{d}$$

$$= \frac{b\beta - \varphi d - d^2 - \theta d + 2\gamma\varphi b + d\varphi}{d}$$

$$= \frac{b\beta - d^2 - \theta d + 2\gamma\varphi b}{d}$$

$$\lambda_4 = E - F$$

$$= \frac{b\beta - \varphi d - d^2 - \theta d}{d} - \frac{2\gamma\varphi b + d\varphi}{d}$$

$$= \frac{b\beta - \varphi d - d^2 - \theta d - 2\gamma\varphi b + d\varphi}{d}$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 = H$$

$$= -\nu$$

\Rightarrow untuk λ_3 ,

$$\lambda_3 = \frac{b\beta - d^2 - \theta d + 2\gamma\varphi b}{d} < 0$$

$$\frac{b\beta + 2\gamma\varphi b - d(d + \theta)}{d} < 0$$

$$\frac{b\beta + 2\gamma\varphi b}{d} - (d + \theta) < 0$$

$$\frac{b\beta + 2\gamma\varphi b}{d} < (d + \theta)$$

$$\frac{b\beta + 2\gamma\varphi b}{d(d + \theta)} < 1$$

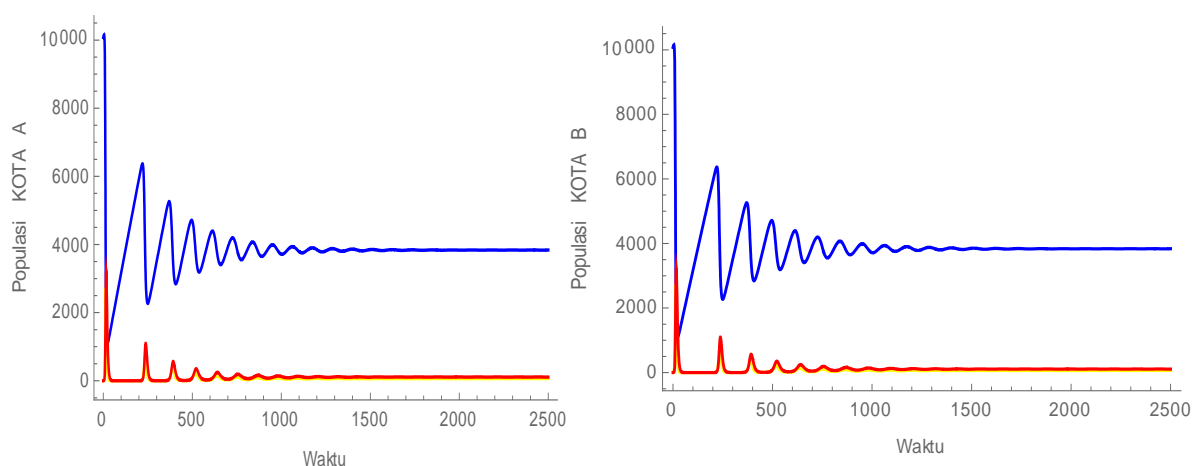
Maka $\lambda_3 < 0$ jika $R_0 < 1$

3.5. Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan dengan menggunakan software Mathematica dan dengan memberikan nilai-nilai untuk masing-masing parameter sesuai dengan kondisi R_0 dalam teorema-teorema yang telah diberikan diatas. Simulasi ini diberikan untuk memberikan gambaran geometris dari teorema eksistensi dan kestabilan dari titik tetap model SIA ini. Dalam model ini akan dianalisis dinamika penularan penyakit HIV/AIDS dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1. Dinamika populasi dapat dilihat pada Gambar 2.

Tabel 1. Nilai-nilai parameter simulasi

Simbol	Keterangan	Nilai
B	Laju Kelahiran	28.56
D	Rata-rata kematian alami	0.00021
β	Rata-rata penularan	0.000113
γ	Rata-rata penularan antar wilayah	0.000113
θ	Rata-rata perubahan dari HIV menjadi AIDS	0.435
V	Rata-rata kematian akibat HIV/AIDS	0.253
φ	Rata-rata perpindahan penduduk	0.002

**Gambar 2.** Dinamika populasi kota A dan Kota B

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis penelitian ini diperoleh hasil kesimpulan yaitu: (1) Diperoleh titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit P_0 dan titik kesetimbangan endemik P_* , (2) Bilangan reproduksi dasar R_0 menentukan eksistensi dan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Jika $R_0 < 1$ maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil. $R_0 > 0$ maka terdapat dua titik kesetimbangan, titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil, dan titik kesetimbangan endemik yang stabil, (3) Sampai saat ini belum ada obat ataupunvaksi untuk mencegah dan menyembuhkan infeksi HIV/AIDS. Tetapi, pencegahan dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain: menggunakan kondom setiap kali berhubungan seks dan menghindari penggunaan jarum bekas.

Referensi

- [1] Marsudi, M. dan R. B. E. Wibowo. 2013. Model Matematika Penyebaran HIV/AIDS dengan Edukasi Kesehatan. Natural B. Volume 2(1).
- [2] Eduafo, S. I. K. Adu, F. T. Oduro, dan I. O. Darko. 2015. An SIA Model of HIV Transmission in Ghana. International Mathematical Forum. Volume 10(2): 95-104.1.
- [3] Ault, J.C and Ayres, Frank. Persamaan Diferensial dalam satuan SI Metric. Jakarta: Erlangga.
- [4] Bayer R. Stigma and the ethics of public health: not can we but should we. Social Science & Medicine. 2008; 67(3): 463-72.
- [5] Braun, M. Differential Equations and Their Application. New York:Springer-Verlag.
- [6] Diekman O, Heesterbeek JAP. Mathematical Epidemiology of Infection Diseases. USA: John Wiley and Son, Ltd.
- [7] Gireig, F. Koopman, C. 2003 Multi Level Analysis of Women's Empowerment and HIV prevention: Quantitative Survey Result from Preliminary Study in Botswana. J. AIDS behavior, 7: 195-208.
- [8] Hia ME, Balatif O, Ferjouchia H, Labriji EH, Rachik M. Modelling the spread of HIV/AIDS in Morocco. International Journal of Computer Sciences Issues Morocco. 2019;9(6).

- [9] Infodatin. 2016. Situasi Penyakit HIV AIDS di Indonesia. Pusat Data dan Informasi Kementrian Kesehatan RI: Jakarta Selatan.
- [10] Jiang, D., C. Ji, N. Shi, dan J. Yu. 2010. The Long Time Behavior of DI SIR Epidemic Model with Stochastic Perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Volume 372: 162-180.
- [11] Murray JD. *Mathematical Biology Third Edition*. New York: Berlin Heidelberg; 2002.
- [12] Sutimin, Imamudin. Model Dinamika Penularan Human Immunodeficiency Virus (HIV). *Jurnal Sains dan Matematika Universitas Diponegoro*. 2009;17(1).
- [13] Syamsuddin, Toaha. *Pemodelan Matematika Dalam Dinamika Populasi*. Makassar: Dua Satu Press.
- [14] Wan, H. dan J. Cui. 2007. An SEIS Epidemic Model with Transport-Related Infection. *Journal of Theoretical Biology*. Volume 247(3): 507-724.